LES NOMBRES PALINDROMES

Visuellement faciles à identifier, leurs propriétés offrent des problèmes de tout niveau, et de beaux défis informatiques. Les mathématiciens ont aussi trouvé de beaux résultats : ainsi tout nombre est somme de trois nombres palindromiques seulement. JEAN-PAUL DELAHAYE

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal).

Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur **www.pourlascience.fr**

Les mots « gag », « non », « elle », « rotor », « ressasser » se lisent de droite à gauche aussi bien que de gauche à droite. On dit que ce sont des palindromes : « ressasser » et « rotavator » sont les plus longs mots palindromes en français.

Si on néglige les blancs, les accents, les majuscules et la ponctuation, on sait composer des phrases et même de longs textes palindromiques comme :

Élu par cette crapule. (Marcel Duchamp); *Noël a trop par rapport à Léon.* (Sylvain Viart) ; *Rue Verlaine gela le génial rêveur.* (Jacques Perry-Salkow) ; *Ésope reste ici et se repose.* (Maître Capelo) ; *Éric notre valet alla te laver ton ciré.* (Maître Capelo)

Georges Perec composa un texte palindromique de 1247 mots. Frédéric Schmitter et Jacques Perry-Salkow ont plus récemment écrit un récit palindromique « Sorel-Eros », qui comporte 10001 lettres. Romain Seignovert a trouvé des palindromes pour toutes les langues européennes (*voir la figure 1 et https://europeis-notdead.com/europe-is-not-deadfr/disco/expressions-europeennes/palindromes-europeens/*).

Jolis exploits, mais qui ne concernent guère le mathématicien. Il préfère envisager les nombres palindromes. En trouver est facile puisque toute suite de chiffres ne commençant pas par 0 est un nombre et qu'on peut donc sans difficulté en écrire qui soient des palindromes : 242, 10001 ou 12321. Leur liste, bien sûr infinie, se programme aisément. C'est la suite A002113 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (https://oeis.org/A002113). En voici le début : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313, 323, 333, 343, 353, 363, ...

On va voir cependant que les jeux et problèmes que les mathématiciens envisagent à propos des nombres palindromes sont aussi variés et difficiles que ceux usuels de la discipline... et que certains restent irrésolus.

COMBIEN SONT-ILS ?

Commençons pas envisager des questions faciles. Combien existe-t-il de nombres palindromes en base 10 possédant n chiffres ?

Si n est pair, pour avoir un nombre palindrome à n chiffres décimaux, il suffit de choisir comme on le veut ses $n/2$ premiers chiffres en imposant que le premier ne soit pas 0, et de les répéter en ordre inverse. Pour $n = 6$ on choisit par exemple 247 qui donne 247742. On en tire que le nombre de nombres palindromes ayant n chiffres, n pair, est exactement $9\text{x}10^{(n/2)-1}$.

Pour $n = 1$, il y a 10 nombres palindromes : 0, 1, ..., 9. Si n est impair supérieur à 1, en raisonnant comme dans le cas pair, on trouve que le nombre de palindromes à n chiffres est : $9\text{x}10^{(n-1)/2}$. On en tire que le nombre de nombres palindromes inférieurs à 10^n pour $n = 1, 2, 3, 4, ...$ est : 10, 19, 109, 199, 1099, 1999, 10999, 19999, ... (ce qui est toujours supérieur à $10^{n/2}$).

Leur densité devient nulle à l'infini et elle est sensiblement inférieure à celle des nombres premiers ce qu'on démontre ou qu'on constate

1 L'EUROPE DES PALINDROMES

en observant le nombre de nombres premiers inférieurs à 10^n pour $n = 1, 2, 3, 4$, .. qui est 4, 25, 168, 1229, 9592. 78498, 664579, 5761455, ... (environ $10^n/n$).

La série des inverses des nombres palindromes est convergente vers la limite 3,37018... alors que la série des inverses des nombres premiers a une somme infinie, marque d'une densité assez forte.

DIVISIBILITÉ, NOMBRES PREMIERS

Autre propriété élémentaire : si un nombre palindrome possède un nombre pair de chiffres alors il est divisible par 11, et ce n'est donc pas un nombre premier, sauf pour 11 lui-même. On applique le critère de divisibilité par 11 : « Un nombre est divisible par 11, si et seulement si la différence entre la somme des ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est un multiple de 11 ». Ainsi 915123 --> (9+5+2)(1+1+3)=11 donc 915123 est un multiple de 11). Pour un nombre palindrome *N* ayant un nombre pair de chiffres, les deux sommes envisagées sont égales et donc leur différence est nulle, et donc *N* est multiple de 11.

On arrive maintenant en terrain moins facile. Qu'en est-il des nombres palindromes ayant un nombre impair de chiffres ? Peuvent-ils être des nombres premiers et plus

palindrome

> généralement qu'en est-il des diviseurs des nombres palindromes ?

Voici d'abord le début de la suite des nombres premiers palindromes (https://oeis.org/A002385) : 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, 12821, 13331, 13831, 13931, 14341, 14741, 15451, 15551, 16061, 16361, 16561, 16661, 17471, 17971, 18181, ...

Le plus grand nombre premier palindrome connu aujourd'hui est : $10^{474500} + 999 \times 10^{237249} + 1$ qui possède 474501 chiffres.

On cherche à démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers palindromes. Cela semble probable car les deux propriétés « être premier » et « être palindrome » au moins pour les nombres possédant un nombre impair de chiffres semblent indépendantes l'une de l'autre. Cependant cette intuition un peu vague n'a pas pu être confirmée par une démonstration et donc l'affirmation « Il y a une infinité de nombres premiers palindromes » n'est qu'une simple conjecture.

Il existe des méthodes pour construire des nombres palindromes qui ne sont pas des nombres premiers. En voici une.

1x1=1
11x11=121
111x111=12321
1111x1111=1234321
11111x11111=123454321
111111x111111=12345654321
1111111x1111111=1234567654321
11111111x11111111=123456787654321
111111111x111111111=12345678987654321

Malheureusement la méthode ne fonctionne plus au-delà de 9 fois le '1' :

1111111111x1111111111=1234567900987654321

Le quatrième des nombres de cette série de palindromes est vraisemblablement le premier palindrome à avoir attiré l'attention d'un mathématicien. En effet, il est mentionné par Mahāvīra un mathématicien indien qui vécu au IXe siècle de notre ère. Dans son ouvrage en sanskrit Ganita-sāra-sangraha, il évoque ce carré parfait en le décrivant comme un nombre « commençant par 1 et allant jusqu'à 6, puis décroissant en ordre inverse ».

Voici une série de formules qui elles donnent une infinité de nombre palindromes composés :

11x11x11 = 1331
11x11x111 = 13431
11x11x1111 = 134431
11x11x11111 = 1344431
11x11x111111 = 13444431
...

Ajoutons encore deux séries infinies :
11x111x(11...11) = 13566...66531
et 111x111x(11...11) = 136899...9998631

LES NOMBRES NON-PALINDROMES

2

Les nombres strictement non palindromes sont, par définition, les entiers *n* qui ne sont palindromes dans aucune base b avec $2 \leq b \leq n - 2$. On impose la limite *n*-2 car en base *n*-1 le nombre *n* s'écrit 11 et est donc toujours palindrome. La suite des nombres strictement non palindromes commence par : 0, 1, 2, 3, 4, 6, 11, 19, 47, 53, 79, 103, 137, 139, 149, 163, 167, 179, 223, 263, 269, 283, 293, ... qui est la suite A016038 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane. Une propriété intéressante des nombres strictement non palindromes est que ce sont tous des nombres premiers à l'exception de 4 et 6. En voici la démonstration.

On se donne un nombre composé quelconque $n > 6$ et on montre que *n* est palindrome dans une base bien choisie.

• Si *n* est pair, *n* s'écrit 22 dans la base $b = n/2 - 1$ car $n = 2(n/2 - 1) + 2$.

• Si *n* est impair, on écrit $n = pm$ où *p* est le plus petit facteur premier de *n*. Nécessairement $p \leq m$.

• Si $p = m = 3$, alors $n = 9$ s'écrit 1001 en base $b = 2$.

• Si $p = m > 3$, alors *n* s'écrit 121 en base $b = p - 1$ car $121_{p-1} = 1 + 2(p-1) + (p-1)(p-1) = 1 + 2p - 1 + p^2 - 2p - 1 = p^2 = n$

• Le cas $p = m - 1$ est impossible car *p* et *m* sont impairs.

• Si $p < m - 1$, alors *n* est le palindrome *pp* en base $b = m - 1$, car $p(m-1) + p = m$

Sans mal, on contrôle à chaque fois que la base proposée vérifie $2 \leq b \leq n-2$ et que les chiffres du palindrome proposé sont des nombres entiers entre 0 et *b*-1.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_strictement_non_palindrome.

FACTEURS PREMIERS ET CONJECTURES

William Banks a démontré qu'il existe des nombres palindromes ayant un nombre de facteurs premiers aussi grand qu'on le souhaite : il existe donc par exemple des nombres palindromes ayant plus de 1000 facteurs premiers. Il a aussi établi qu'il existe des nombres palindromes ayant des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire : il existe par exemple des nombres palindromes ayant un facteur premier de plus d'un million de chiffres.

Une autre étude cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sataka établit que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers nombres palindromes tend vers 0. On sait d'après le théorème de Hadamard et de la Vallée Poussin que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$ ($\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x). On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes : la proportions de nombres premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev : les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont uniquement 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée

3 DEUX FOIS PALINDROME

Voici les plus petits entiers palindromes dans deux bases *a* et *b* à la fois, *a* et *b* variant de 2 à 19. Ce tableau a été établi par Erich Friedman.

Ainsi pour *a* = 2 et *b* = 3, il faut aller jusqu'à 6643 pour trouver un nombre qui convient : $6643_{10} = 1100111110011_2 = 100010001_3$

a/b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	6643																	
4	5	10																
5	31	26	46															
6	7	28	21	67														
7	85	8	85	24	92													
8	9	121	63	18	154	121												
9	127	10	10	109	80	40	154											
10	33	121	55	88	55	121	121	191										
11	255	244	255	12	166	24	36	60	232									
12	65	13	65	26	104	78	65	91	181	277								
13	313	28	42	98	14	235	154	70	222	84	326							
14	15	1210	15	408	135	135	45	30	323	60	253	379						
15	693	16	1265	1612	80	16	316	80	828	48	241	112	436					
16	17	68	17	119	385	85	170	136	353	221	1172	170	337	497				
17	341	784	341	18	1211	307	18	528	252	36	290	126	90	144	562			
18	325	1733	38	57	209	57	325	209	171	133	1462	209	323	361	433	631		
19	381	20	514	428	80	40	260	20	666	60	362	140	60	80	514	180	704	
20	21	1604	21	126	21	1944	63	273	252	84	761	42	105	421	273	126	541	781

pour les huit premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, Paulo Ribenboim a proposé de dénommer « nombre premier triplement palindrome » un nombre premier palindrome, de *m* chiffres décimaux, où *m* est un nombre premier palindrome de *n* chiffres décimaux, où *n* un nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10000500001 qui possède 11 chiffres ; 11 est un nombre premier palindrome qui lui-même possède 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome. Plus intéressant 1011310 + 4661664×105652 + 1 possède 11311 chiffres, le nombre 11311 est un nombre premier palindrome qui lui-même possède 5 chiffres, encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ne sait pas s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

ET QUAND ON CHANGE DE BASE ?

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagée que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases ?

Les calculs du nombre de nombres palindromes faits pour la base 10 se généralisent sans difficulté à une base $b > 1$. La propriété que « les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11 » devient sans surprise que « les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base *b*, sont multiples de $(b + 1)$ ». Par exemple, le nombre *N* dont l'écriture en base 5 est 1233215 est divisible par 6 : $123321_5 = 5^5 + 2x5^4 + 3x5^3 + 3x5^2 + 2x5^1 + 1 = 4836 = 806x6$

Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, dix sont des palindromes en base 24.

$5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^A = 15151_{24}$

En base 24 on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans les formules précédentes.

Une question vient naturellement à l'esprit : « existe-t-il des nombres *n* palindromes dans plusieurs bases de numération *b* à la fois ? »

Remarquons d'abord que si *n* est un nombre quelconque, il est palindrome dans

4 UN JEU AVEC LES PALINDROMES

On recherche les combinaisons de chiffres qui multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres la formule 9x(9x9+2) donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau suivant est dû à E. Friedman. (voir http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html) Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés, mais ils sont peut-être améliorables pour 10 chiffres utilisés ou plus.

NB DE CHIFFRES	FORMULE	PALINDROME
1	9	9
2	9+2	11
3	7x7x7	343
4	9x(9x9+2)	747
5	9x9x9x9-5	6556
6	3x7x7x8x8x8	65856
7	8x8x8x8x9x(9+2)	405504
8	8x9x9x9x9x9x9-4	4251524
9	8x8x(5x6x8x8x8x9+2)	8847488
10	7x7x7x8x(7x8x8x8x9-4)	88499488
11	6x8x8x8x9x(6x7x9x9x9+8)	846747648
12	7x8x8x8x8x9x(4x7x7x9x9-3)	4095995904
13	7x7x7x7x8x(7x7x7x8x8x8+6)	23613431632
14	9x9x9x9x9x9x(9x9+2)x(4x7x7x8-6)	68899199886
15	7x7x7x7x8x8x8x8x8x(2+9)x(9x9x9+3)	633498894336

5 PYRAMIDES

Si partant d'un chiffre considéré comme sommet, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes dont chaque étage coïncide avec l'étage juste au-dessus et ne dépasse que d'un chiffre à droite et à gauche de l'étage juste au-dessus, on est vite arrêté. Seules les pyramides indiquées en bas de page sont possibles.

En s'autorisant un élargissement de deux chiffres à droite et à gauche à chaque étage, on obtient beaucoup mieux (toujours en n'utilisant que des nombres premiers palindromes) :

La hauteur maximale des pyramides les plus hautes de sommet 2 est 26 et il y a deux solutions, la dernière ligne de l'une d'elle étant :

13189272993373301274751519389433901197127233963570
20753693327217911093349891515747210337339927298131

Si, au sommet, on place le chiffre 3, on trouve trois pyramides de hauteur 28. En partant de 5 ou 7 on trouve à chaque fois une pyramide de hauteur 29.

Tous ces résultats proviennent de deux mathématiciens américains G. L.Honaker et Chris Caldwell passionnés des nombres premiers.

On trouvera ces résultats dans l'article suivant : G. L. Honaker, Chris K. Caldwell, Palindromic prime pyramids, Journal of Recreational Mathematics 30.3 : 169-176, 2000 dont des compléments ont été ajoutés en : http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/step_size2.html http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/

2	2	3	3	5	5	5	7
929	929	131	131	151	353	757	373
39293	39293	11311	71317	31513	33533	37573	93739
7392937	3392933			3315133	1335331	9375739	
73929373	733929337						

toutes les bases b où $n > n$, car n s'y écrit avec un seul chiffre. C'est un peu facile ! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient : « existe-t-il des nombres n palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois avec $b < n$? »

Une petite exploration montre que oui : on trouve aisément des nombres palindromes dans plusieurs bases $b \leq n$ à la fois. Un bel exemple est 105. En effet : $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 771_4 = 33_{34}$.

Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman.

Bien évidemment il est intéressant de savoir si les nombres de la suite de Fibonacci F_n ($F_0 = 1$ $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n>1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cité au-dessus ne sont pas les seuls au total : encore une conjecture !

SOMMES DE NOMBRES PALINDROMES

En additionnant trois nombres premiers au plus on peut obtenir tout entier impair. C'est là une affirmation dénommée « conjecture faible de Goldbach », mais qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontré en 2013 par Harald Helfgott. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach, qui, elle, attend toujours une démonstration.

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes ? Donnent-elles tous les entiers ? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas ? Plus facile à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui parfaitement les réponses à ces questions concernant les sommes de nombres palindromes.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes :

21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1091, 1092, 1093, 1094, ...

C'est la suite A035137 de l'encyclopédie de Sloane. Il est assez aisé de vérifier qu'un nombre n de cette liste n'est pas la somme de deux palindromes : on considère les n+1 façons d'écrire n comme une somme de deux entiers $a + b$, et on observe que jamais a et b ne sont simultanément palindromes.

Joseph De Vincentis et Ulrich Schimke ont démontré qu'il existait une infinité de nombres entiers qui ne sont pas somme de deux nombres palindromes. L'affaire est entendue : en opérant la somme de deux nombres palindromes on n'obtient qu'une faible partie des entiers.

Le plus beau résultat concernant les sommes de palindromes est récent mais lui aussi tout aussi définitif : « Tout nombre entier est somme de trois nombres palindromes au plus ». Le nombre 2000 par exemple est la somme de 616, 383 et 1001.

Le résultat a été obtenu en deux temps : d'abord en 2015 William Banks a démontré qu'en base 10, tout entier est somme d'au plus 49 nombres palindromes. Il semblait alors qu'on était au début d'une série de résultats où progressivement on remplacerait 49 par des entiers des plus en plus petits. Il se trouve que l'affaire fut magistralement traitée d'un seul coup.

Javier Cilleruelo de l'Université de Madrid et Florian Luca un mathématicien roumain aujourd'hui professeur à l'université de Witwatersrand à Johannesburg en Afrique du Sud ont en effet démontré en 2016 dans un article de 39 pages que : « Dans toute base $b \geq 5$, tout nombre s'écrit comme une somme d'au plus trois nombres palindromes ». La démonstration est constructive puisqu'elle décrit un algorithme qui conduit pour tout entiers donné à la somme recherchée. Cette prouesse nous rappelle la démonstration de Gauss en 1796 établissant que tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires (de la forme $n(n+1)/2$).

L'article revient aussi sur les sommes de deux palindromes et montre que les entiers qui ne sont pas somme de deux palindromes sont très nombreux dans le sens suivant : pour chaque base $b \geq 2$, il existe une constante strictement positive c telle que les nombres qui ne sont pas somme de deux palindromes représentent une proportion des nombres entiers supérieure à c. Les auteurs conjecturent sans toutefois réussir à la démontrer une propriété analogue pour les nombres entiers qui sont la somme de deux palindromes.

INFINIMENT PALINDROME

Terminons par un remarquable résultat concernant les palindromes infinis et les nombres réels transcendants. Pour l'énoncer il faut d'abord évoquer la notion de « nombre infiniment palindrome » et celle de « fraction continue ».

Considérons la suite de symboles composée uniquement de a et de b définie en partant de *ab* et en ajoutant son complément *ba* (chaque a est remplacé par b et chaque b par a), ce qui donne *abba*, puis en recommençant en ajoutant le complément de ce qu'on vient d'obtenir, ce qui donne *abbabaab*, et en recommençant indéfiniment :

abbabaabbaababba *abbabaabbaababbabaa-babbaabbabaab* etc.

On obtient une suite infinie de a et de b dont les 4 premiers symboles sont un palindrome, de même que les 16 premiers symboles, de même que les 64 premiers symboles, etc. On dit que c'est un mot « infiniment palindrome » : ses débuts sont une infinité de fois des palindromes.

Quand on dispose d'une suite infinie d'entiers positifs a_0, a_1, a_2, ... il est usuel en arithmétique de considérer le nombre réel suivant dénommé fraction continue associée à la suite a_0 a_1,a_2, ... :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Un extraordinaire résultat de Boris Adamczewski et Yan Bugeaud établit que si la suite de nombres entiers est infiniment palindrome alors le nombre réel défini par la fraction continue associée est ou bien un nombre quadratique ou bien un nombre transcendant, c'est-à-dire est ou bien solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers de degré 2 au plus, ou bien n'est la solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Dit encore autrement, les nombres réels définis par des fractions continues infiniment palindromes sont élémentaires ou alors aussi compliqués que le nombre π ou e (qui sont transcendants). C'est bien sûr un moyen nouveau de définir des nombres transcendants. En particulier le nombre x obtenu en prenant $a = 1$ et $b = 2$ dans le mot infiniment palindrome écrit au-dessus et écrivant la fraction continue associée est transcendant :

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

On aimerait avoir un résultat analogue concernant les nombres dont l'écriture en base B est une suite infiniment palindrome, mais pour l'instant les techniques disponibles achoppent et à nouveau on est réduit à des conjectures.

Amusements sans prétention ou résultats profonds et difficiles, voire seulement conjecturés, les palindromes occupent passionnément les mathématiciens qui y découvrent mille merveilles insoupçonnées.

Fin

BIBLIOGRAPHIE

- Javier Cilleruelo, Florian Luca, Every positive integer is a sum of three palindromes, arXiv 1602.06208, 2016.
- Attila Bérczes, Volker Ziegler, On simultaneous palindromes, J. Comb. Number Theory 6 (2014), 37–49.
- Yann Bugeaud, Automatic continued fractions are transcendental or quadratic, arXiv preprint arXiv:1012.1709, 2010.
- Boris Adamczewski, Yann Bugeaud, Palindromic continued fractions, Annales de l'institut Fourier. Vol. 57. No. 5. 2007.
- G. L. Honaker, Chris Caldwell, Palindromic prime pyramids, Journal of Recreational Mathematics 30.3 : 169-176, 2000.
- Erich Friedman, Problem of the Month, June 1999 : http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html